MPSI 2022/2023 | DS n°5

Ce sujet est constitué de **2 parties indépendantes**, que les candidats pourront traiter dans l'ordre de leur choix.

La calculatrice est autorisée

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Accordeur de guitare

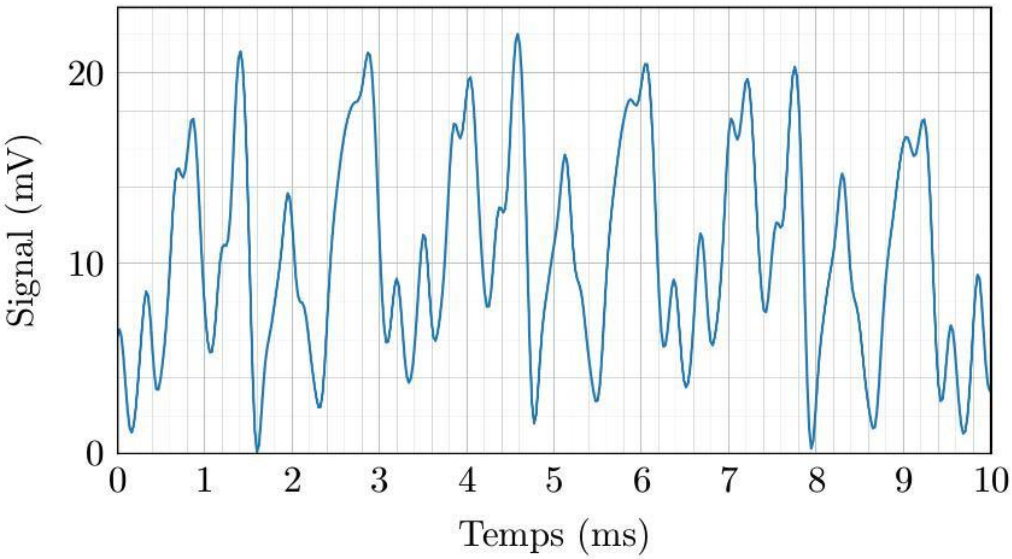
Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare électrique. L'objectif de ce sujet est, grâce à une série de filtre, d'isoler la fréquence d'une corde légèrement désaccordée. Le principe consistant à réaccorder la corde n'est pas présenté.

La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau ci-dessous.

Corde	Mi grave	La	Ré	Sol	Si	Mi aigu
f_{ac}(Hz)	82,4	110,0	146,8	196,0	246,9	329,6

I.1 - Le signal

La figure ci-dessous montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro de la guitare électrique.



1) Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

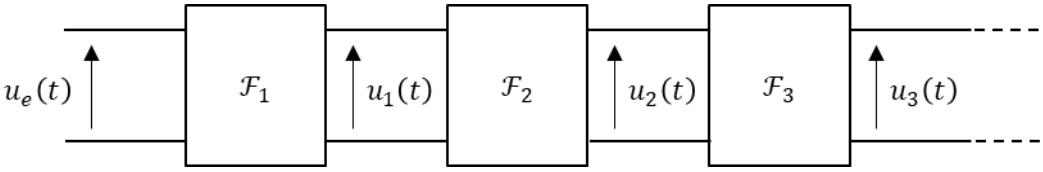
2) Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal, notée f_{co} (on supposera en première approximation que le signal est périodique). De quelle corde de guitare s'agit-il ?

3) L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

Afin d'isoler la fréquence fondamentale f_{co}, ce signal est injecté dans un circuit comportant 3 filtres en série.

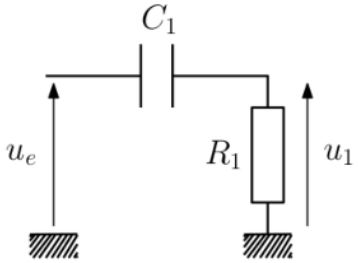
4) Rappeler la/les conditions à respecter afin que, lors d'une mise en cascade de filtres, chaque filtre se comporte tel que prédit par son étude en sortie ouverte.

Dans la suite, on suppose que cette/ces conditions sont respectées.



I.2 - Premier filtre ($\mathcal{F}_1$)

Le signal électrique $u_e(t)$ provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre ci-contre, noté $\mathcal{F}_1$.



5) Exprimer la fonction de transfert $\underline{\mathrm{H}_1}(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1, C_1 et de la pulsation ω d'un signal d'entrée supposé harmonique.

6) De quel type de filtre s'agit-il (nature et ordre) ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.

7) On a choisi $\mathrm{R}_1 = 100\ \mathrm{k\Omega}$ et $\mathrm{C}_1 = 100\ \mathrm{nF}$. Tracer, sur votre feuille, l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.

8) Quel est le rôle de ce premier filtre ?

I.3 - Deuxième filtre ($\mathcal{F}_2$)

En sortie du filtre $\mathcal{F}_1$, le signal $u_1(t)$ est envoyé sur un filtre $\mathcal{F}_2$ de fonction de transfert :

$$\underline{\mathrm{H}_2}(j\omega) = 1 + \frac{\mathrm{G}_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}} \quad \text{avec :} \quad \mathrm{G}_0 = 100 \quad \text{et} \quad \omega_2 = 3{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

9) Que vaut le gain de ce filtre en basse fréquence ? Et en haute fréquence ?

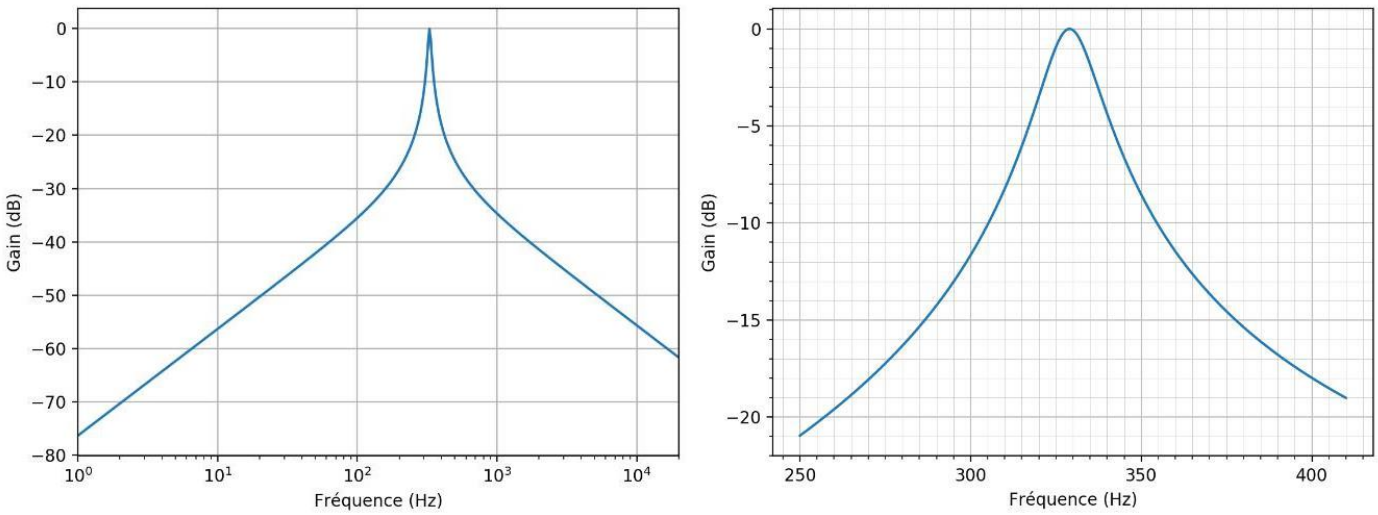
10) Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à la pulsation ω_2. Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

I.4 - Troisième filtre ($\mathcal{F}_3$)

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal $u_2(t)$, dont la valeur est voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigu que l'on souhaite accorder : $f_{ac} = 329{,}6\ \mathrm{Hz}$.

Le principe du filtre $\mathcal{F}_3$ est que sa fréquence caractéristique soit égale à celle du signal de référence de fréquence f_{ac}.

La figure ci-dessous représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre $\mathcal{F}_3$ tracé à deux échelles différentes.



11) Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence caractéristique f_3 ?

12) Définir puis déterminer graphiquement la valeur de sa bande-passante à $-3\ \mathrm{dB}$.

13) Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315$ Hz, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

I.5 - Analyse spectrale

La figure ci-contre correspond au spectre du signal d'entrée $u_e(t)$.

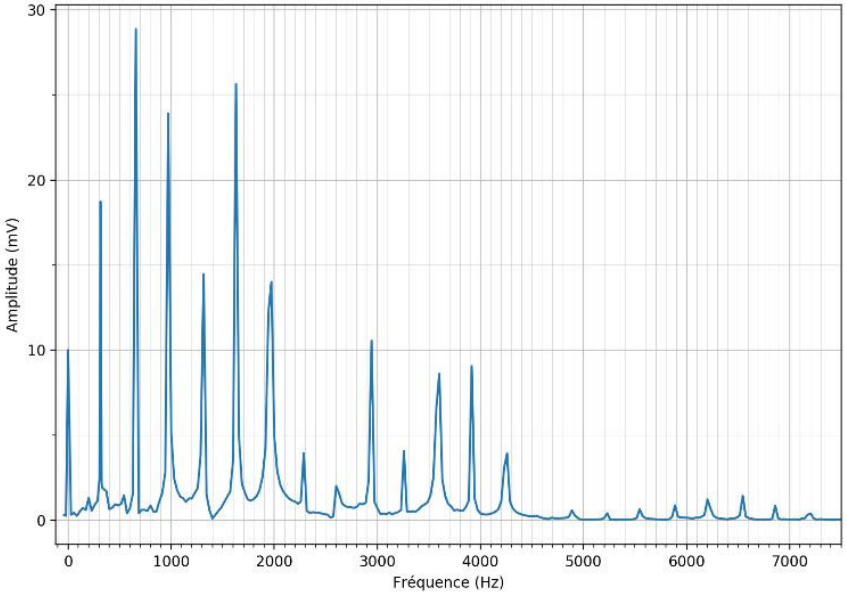
14) Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre de $u_e(t)$.

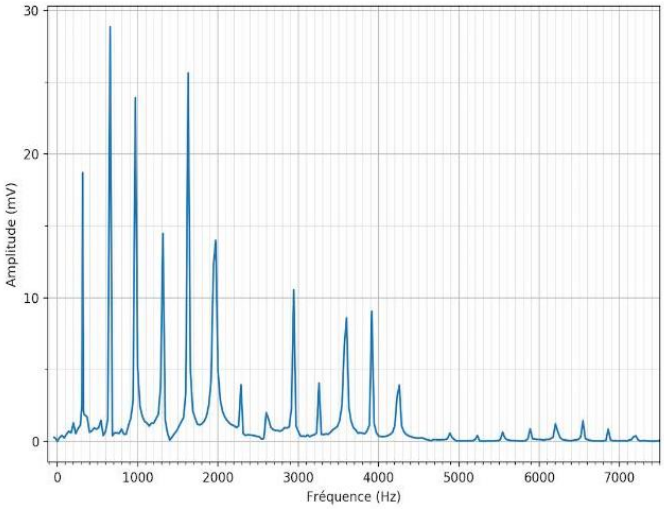
Ci-dessous, on donne 4 spectres notés (a), (b), (c) et (d).

15) En justifiant soigneusement, dire parmi les 4 spectres proposés lequel correspond au signal $u_1(t)$, c'est-à-dire le signal en sortie du filtre $\mathcal{F}_1$.

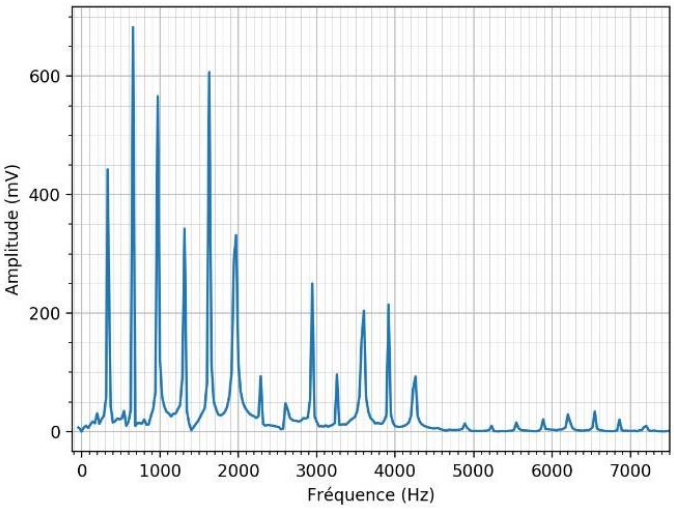
16) Même question pour $u_2(t)$, le signal en sortie du filtre $\mathcal{F}_2$.

17) Tracer l'allure du spectre du signal $u_3(t)$ en sortie du filtre $\mathcal{F}_3$. Tracer l'allure du signal temporel correspondant.

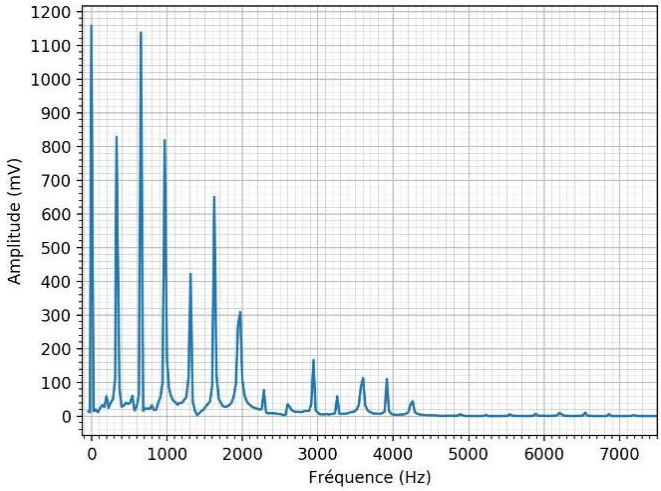




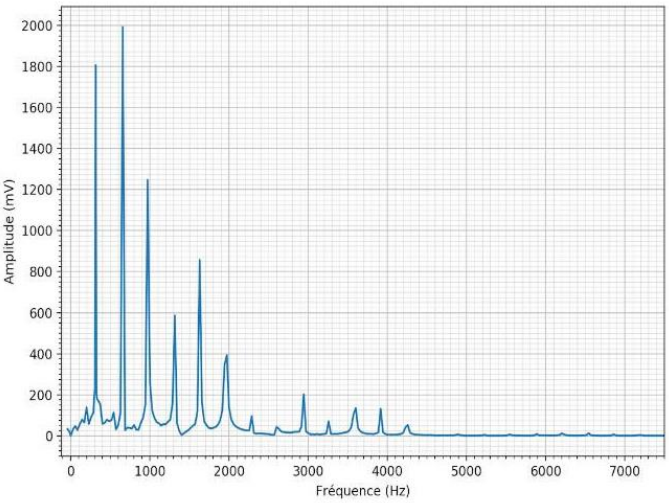
Spectre (a)



Spectre (b)



Spectre (c)

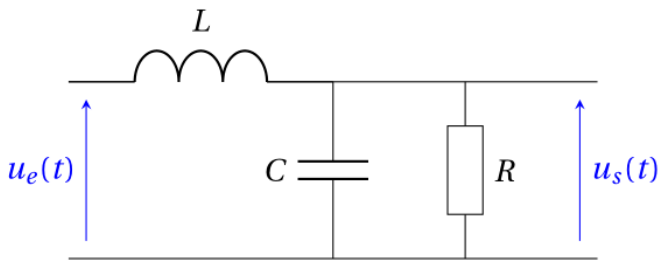


Spectre (d)

---------- Fin de la partie I ----------

II - Utilisation d'un filtre de Butterworth pour la démodulation de fréquence

On considère le filtre ci-contre, appelé filtre de Butterworth.



Formulaire :

$$\cos(p) \times \cos(q) = \frac{1}{2}(\cos(p+q) + \cos(p-q))$$

II.1 - Étude théorique

18) En étudiant les circuits asymptotiques à basse et haute fréquence, établir la nature du filtre.

19) Déterminer la fonction de transfert du filtre. La mettre sous la forme canonique :

$$\underline{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{H}_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

où l'on exprimera H_0, ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

20) Établir l'équation des asymptotes hautes et basses fréquences du gain en décibel du filtre.

Dans la suite, on appelle pulsation caractéristique du filtre ω_c, la pulsation où se croisent les deux asymptotes.

II.2 - Application du filtre : démodulation d'un signal modulé en amplitude

La modulation d'un signal $s(t)$ en un signal $m(t)$ est souvent nécessaire afin de pouvoir le transmettre sur une longue distance. Il faut alors démoduler le signal $m(t)$ reçu à l'arrivée, afin de retrouver le signal d'origine $s(t)$.

Les détails physiques de la modulation et de la démodulation ne sont pas précisés.

Considérons un signal : $s(t) = A_m \cos(\omega_m t)$

Soit un signal dit **porteur** : $p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$ avec : $\omega_p \gg \omega_m$

On appelle **signal modulé** en amplitude : $m(t) = p(t) \times (1 + s(t))$

On appelle **signal démodulé** : $d(t) = p(t) \times m(t)$

21) Représenter les spectres en amplitude des signaux $m(t)$ et $d(t)$.

22) En déduire que le filtre de Butterworth de la partie précédente permet de transformer $d(t)$ en un signal $s'(t)$ de la forme : $s'(t) = A + B \times s(t)$ avec A et B des constantes. Quelle condition doit respecter la pulsation caractéristique ω_c du filtre dans ce cas ?

23) Quel filtre faut-il utiliser pour transformer $s'(t)$ en un signal proportionnel à $s(t)$? Préciser, si cela importe, sa nature, son ordre, sa pulsation de coupure, etc.

---------- Fin de la partie II ----------

MPSI 2022/2023 | Correction DS n°5

I - Accordeur de guitare

I.1 - Le signal

1) Le signal oscille autour de 10mV, donc $\boxed{\langle u_e(t)\rangle \simeq 10\ \mathrm{mV}}$.

2) On repère ce qui ressemble à un motif. Il a une période $T \simeq 3{,}2$ ms. Sa fréquence vaut donc : $\boxed{f_{co} \simeq 3{,}1 \cdot 10^2\ \mathrm{Hz}}$. Il s'agit donc d'une corde Mi aigu (désaccordée ici).

3) Le signal n'étant pas sinusoïdal, il possèdera des harmoniques.

4) Il faut que, pour tout filtre indicé par l'entier n, l'impédance d'entrée du filtre $n+1$ soit très grande (en module) devant l'impédance de sortie du filtre n.

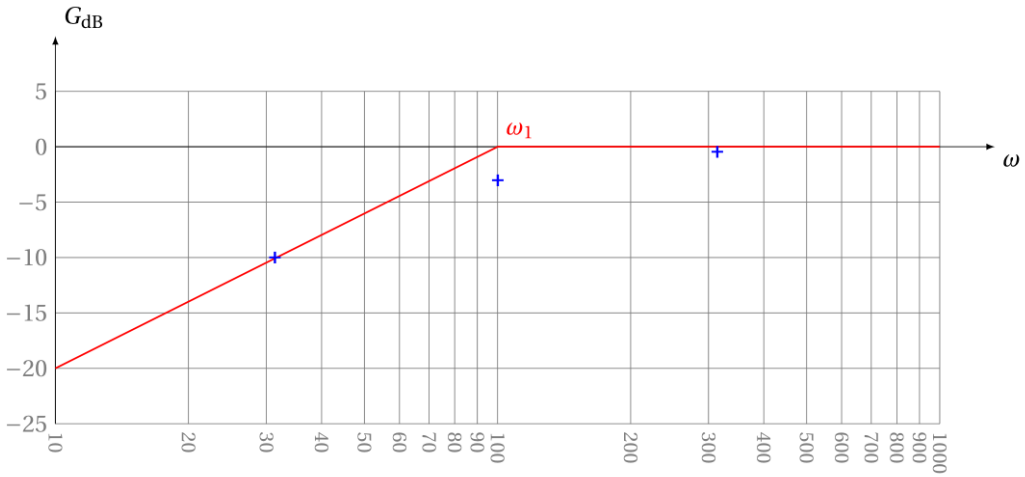
I.2 - Premier filtre ($\mathcal{F}_1$)

5) Un pont diviseur de tension donne :

$$\boxed{\underline{\mathrm{H}_1} = \frac{R_1}{R_1 + \dfrac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1} = \frac{j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_1}}$$

6) Il s'agit d'un **passe-haut** ($\underline{\mathrm{H}_1}(0) = 0$ et $\underline{\mathrm{H}_1}(+\infty) = 1$) **d'ordre 1**. Sa pulsation caractéristique vaut : $\boxed{\omega_1 = 1/R_1C_1}$. Il s'agit également de la pulsation de coupure du filtre, c'est-à-dire la pulsation qui fait la frontière entre les BF et les HF pour ce filtre.

7) On a : $\omega_1 = 100\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ donc $\boxed{f_1 = 15{,}9\ \mathrm{Hz}}$.



8) Puisque $f_1 \ll f_{co}$ (fréquence fondamentale du signal), ce filtre permet de couper la composante continue (composante de fréquence nulle).

I.3 - Deuxième filtre ($\mathcal{F}_2$)

9) En BF, le gain vaut : $\boxed{\left|\underline{\mathrm{H}_2}\right| = 1 + \mathrm{G}_0 \simeq 100}$. Le gain en haute fréquence vaut : $\boxed{\left|\underline{\mathrm{H}_2}\right| = 1}$.

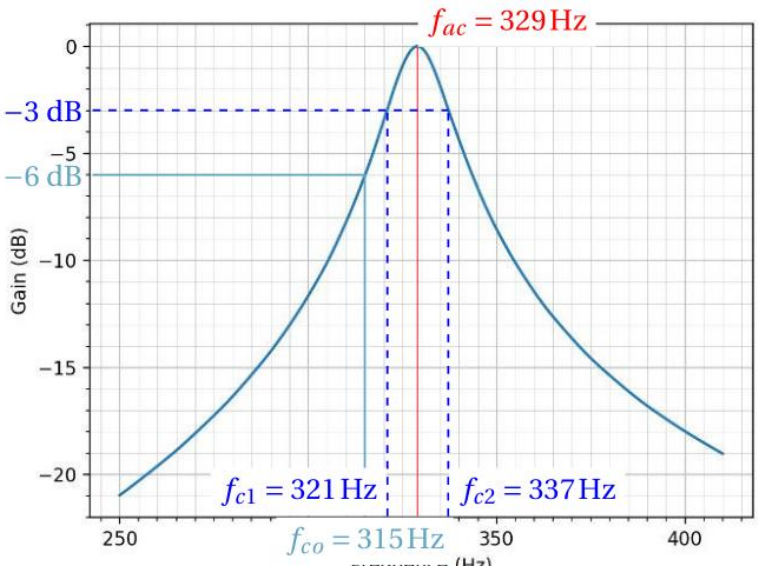
10) La fréquence caractéristique vaut $\boxed{f_2 = 5{,}0 \cdot 10^2\ \mathrm{Hz}}$. Le seconde filtre, laisse passer toutes les fréquences du spectre, mais amplifie d'un facteur 100 les fréquences inférieures à $500\ \mathrm{Hz}$ (les BF), donc en particulier le fondamental f_{co}.

I.4 - Troisième filtre ($\mathcal{F}_3$)

11) Il s'agit d'un filtre passe-bande d'ordre 2 (pentes de ± 20 dB/dec) avec un grand facteur de qualité (résonance très étroite). On peut lire graphiquement $\boxed{f_3 \simeq 329 \text{ Hz}}$, soit une fréquence très proche de la fréquence que l'on souhaite isolée (f_{ac}).

12) La bande passante de ce filtre est l'intervalle de fréquence où $\boxed{G_{dB}(f) > \max(G_{dB}) - 3 \text{ dB}}$. On lit ici : $\text{BP} = [321 \text{ Hz}, 337 \text{ Hz}]$.

13) Le gain en dB pour $f_{co} = 315$ Hz est de −6 dB. La composante fondamentale est donc atténuée d'un facteur : $10^{-\frac{6}{20}} = \boxed{0{,}5}$.



I.5 - Analyse spectrale

14) On observe un pic à fréquence nulle, d'amplitude 10 mV. Il s'agit de la composante continue (cohérent avec la question 1). Le premier pic, celui du fondamental, est situé autour de 300 Hz (cohérent avec la question 2). On observe enfin une série d'harmoniques, ce qui traduit le caractère « non sinusoïdal » du signal (cohérent avec la question 3).

15) On rappelle que le filtre $\mathcal{F}_1$ coupe uniquement la composante continue, sans toucher aux harmoniques du spectre. Le spectre **(a)** vérifie cette propriété : le pic à fréquence nulle a disparu, tous les autres pics ont vu leurs amplitudes conservées.

16) On rappelle que le filtre $\mathcal{F}_2$ amplifie d'un facteur 100 les amplitudes des pics de fréquences inférieures à 500 Hz, et ne touche que peu aux autres fréquences. Le spectre **(d)** possède cette propriété.

<u>Remarque</u> : le spectre (c) possède encore une composante continue, il ne correspond à la sortie d'aucun filtre. Le spectre (b) est amplifié uniformément d'un facteur 10 par rapport au spectre (a). Il ne correspond à la sortie d'aucun filtre.

17) On rappelle que le filtre $\mathcal{F}_3$ sélectionne la composante f_{ac} de manière très sélective avec un gain de $\boxed{1}$. En effet, l'harmonique de rang 2, dont la fréquence vaut $2f_{ac} = 659{,}2$ Hz est atténuée de -30 dB environ, correspondant à un gain de $10^{-\frac{30}{20}} = \boxed{0{,}03}$. On peut donc négliger cet harmonique. Il en va de même pour les suivants qui sont encore plus atténués.

<u>Spectre</u> : un seul pic à $f_{ac} = 329$ Hz et d'amplitude 1,8 V.

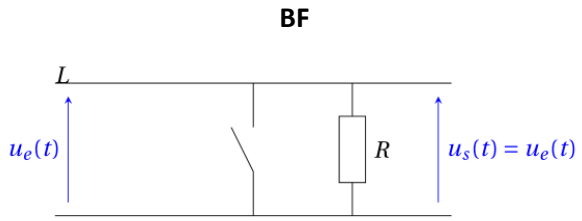
<u>Signal temporel</u> : une sinusoïde de période $1/f_{ac} = 3$ ms, de moyenne nulle et d'amplitude 1,8 V.

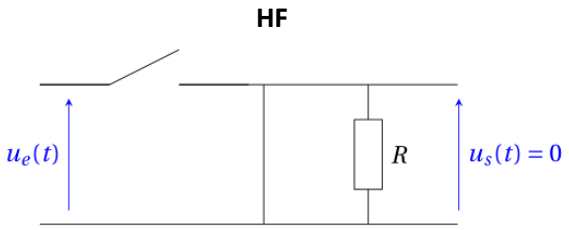
---------- Fin de la partie I ----------

II - Utilisation d'un filtre de Butterworth pour la démodulation de fréquence

II.1 - Étude théorique

18) On a :





C'est donc un **filtre passe-bas**.

19) Notons $\underline{Z_{eq}}$ l'impédance équivalente de la résistance et du condensateur en dérivation.

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

Un pont diviseur de tension donne :

$$\underline{\mathrm{H}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega L}{\underline{Z_{eq}}}} = \frac{1}{1 + j\omega L\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)} = \boxed{\frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\frac{\omega L}{R}}}$$

On trouve bien la forme demandée avec :

$$\boxed{H_0 = 1} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

20) En basse fréquence : $\underline{\mathrm{H}} \simeq \mathrm{H}_0 = 1$. Donc $G_{dB} = 0$. C'est une droite de pente nulle.

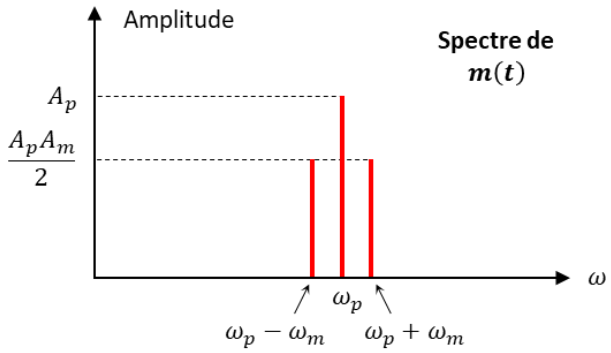
En haute fréquence : $\underline{\mathrm{H}} \simeq \frac{\mathrm{H}_0}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$. Donc $G_{dB} = 40\log(\omega_0) - 40\log(\omega)$. C'est une droite de $\boxed{-40\ \mathrm{dB/dec}}$.

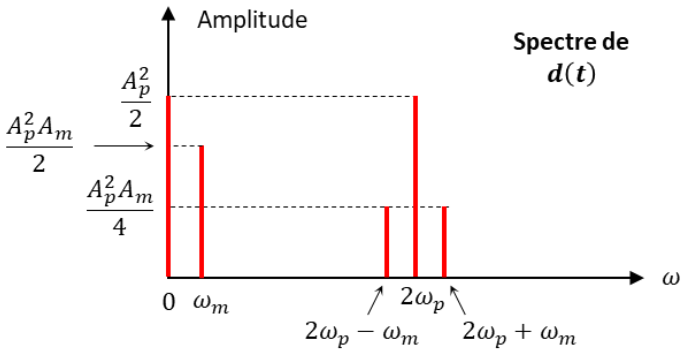
Les deux asymptotes se croisent en $\boxed{\omega_c = \omega_0}$.

21) Linéarisons les expressions à l'aide du formulaire.

$$\begin{aligned}
m(t) &= A_p\cos(\omega_p t) + A_p A_m \cos(\omega_p t)\cos(\omega_m t) \\
&= \frac{A_p A_m}{2}\cos\left((\omega_p - \omega_m)t\right) + A_p\cos(\omega_p t) + \frac{A_p A_m}{2}\cos\left((\omega_p + \omega_m)t\right) \\
d(t) &= A_p^2\cos(\omega_p t)\cos(\omega_p t) + \frac{A_p^2 A_m}{2}\cos\left((\omega_p - \omega_m)t\right)\cos(\omega_p t) + \frac{A_p^2 A_m}{2}\cos\left((\omega_p + \omega_m)t\right)\cos(\omega_p t) \\
&= \frac{A_p^2}{2} + \frac{A_p^2 A_m}{2}\cos(\omega_m t) + \frac{A_p^2 A_m}{4}\cos\left((2\omega_p - \omega_m)t\right) + \frac{A_p^2}{2}\cos(2\omega_p t) + \frac{A_p^2 A_m}{4}\cos\left((2\omega_p + \omega_m)t\right)
\end{aligned}$$

On en déduit les spectres en amplitude.





22) Le filtre de Butterworth étant un filtre passe-bas d'ordre 2, il permet bien de garder uniquement les deux premières composantes de $d(t)$, à condition que : $\boxed{\omega_m < \omega_c \ll 2\omega_p}$. On obtient alors :

$$s'(t) = \frac{A_p^2}{2} + \frac{A_p^2 A_m}{2}\cos(\omega_m t)$$

23) Afin de filtrer la composante continue, il faut un filtre passe-haut de pulsation de coupure $\boxed{\omega_{c2} < \omega_m}$. On obtient alors :

$$s''(t) = \frac{A_p^2 A_m}{2}\cos(\omega_m t) \propto s(t)$$

---------- Fin de la partie II ----------